

Errata (sur les formes quadratiques)

Dans Déf 7.3.1 : Pour $A = A^T$ matrice sym. $\boxed{n \times n}$

On dit que q_A est non-dégénérée si

A) $x^T A y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ implique $x = 0$

(cela signifie que 0 est le seul vecteur qui est A -orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$)

B) On dit que q_A est isotrope, s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$ tel que $q_A(x) = 0$ (donc $x^T A x = 0$)

Rem : 1) q_A non dégénérée $\Leftrightarrow A$ inversible

0 n'est pas valeur propre de $A \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

2) q_A isotrope $\Leftrightarrow$ non définie (val. propres > 0 et < 0) (sur $\mathbb{R}$)

q_A dégénérée $\Rightarrow q_A$ isotrope

mais la réciproque est fautive : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ non dégénérée

mais $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$x^T A x$

Rappel : $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto Ax$$

On étudie l'effet de A sur

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \quad \text{hyper-sphère unité}$$

on a qe $\max_{x \in C} \|Ax\|^2 = \max_{x \in C} Ax \cdot Ax$

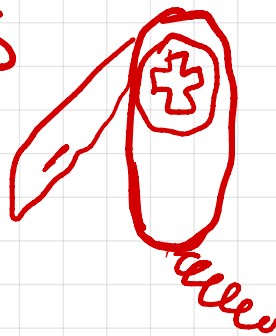
$$= \max_{x \in C} x^t A^t A x = \max_{x \in C} \varphi_{A^t A}(x) = \text{+ grande val. propre de } A^t A$$

$$\min_{x \in C} \|Ax\|^2 = \text{+ petite valeur propre de } A^t A$$

Def. 7.5.5 (Décompositions en valeurs singulières d'une matrice $m \times n$)

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

DVS



couteau suisse
de $\|A\|$.

Soit $A^t A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

On a qe $A^t A$ est symétrique (et positive)

Diag. orthog. $\Rightarrow \exists$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

$B = (v_1, \dots, v_n)$ constituée de vect. propres
(unitaires) de la matrice $A^T A$
associés à des valeurs propres

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \quad (\in \mathbb{R}_+)$$

(avec ^{éventuelle} répétition)

Rem: $\|Av_i\|^2 = Av_i \cdot Av_i = (Av_i)^T Av_i$
 $= v_i^T \underbrace{A^T A}_{\lambda_i} v_i = \lambda_i \underbrace{v_i^T v_i}_1 = \lambda_i$

donc $\lambda_i \geq 0$

On réarrange les val propres de $A^T A$
selon ordre décroissant

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

On appelle valeurs singulières de A

les $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ ($\|Av_i\| = \sigma_i$)

Thm 7.5.6 : Soit $(v_1, \dots, v_n)$ base orthon. de $\mathbb{R}^n$
de vect.-propres de $A^T A$.

Supposons qe A
possède r valeurs singulières non-nulles
(donc $A^T A$ a r val. propres $\neq 0$)
avec multiplicité

Alors $(Av_1, Av_2, \dots, Av_r)$
est une base orthogonale de $\text{Im}(A)$.
et donc $\text{rang}(A) = r$.

idée : $Av_i \cdot Av_j = v_i^T A^T A v_j = v_i^T \lambda_j v_j$
 $= \lambda_j \underbrace{(v_i \cdot v_j)}_{=0} = 0$

$$Av_i \cdot Av_i = \lambda_i \underbrace{v_i \cdot v_i}_{=1} = \lambda_i \neq 0 \quad \text{s' } i=1, \dots, r.$$

Rem : les vecteurs $v_{r+1}, \dots, v_n$ sont
associés à la val propre 0 de $A^T A$

cod $v_{r+1}, \dots, v_n \in \text{Ker}(A^T A) \underset{\text{exo}}{=} \text{Ker}(A)$.

Notation 7.5.7 : on écrit

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \underbrace{\hspace{1cm}}_{n-r} \\ \text{colonnes} \\ \text{nulles} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m-r \text{ lignes} \\ \text{nulles} \end{array}$$

$$\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$D \in M_{r \times r}(\mathbb{R})$$

matrice
diagonale

Théorème 7.5.8 (existence d'U, D, V)

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ de rang $= r$

Alors il existe $(r = \dim(\operatorname{Im}(A)))$

$(n-r = \dim(\operatorname{Ker}(A)))$

1) Une matrice $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ comme ci-dessus

t.q. les coeff. diagonaux de D

sont r premières val. singulières $\neq 0$ de A

écrites dans l'ordre décroissant.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

2) une matrice orthogonale U $m \times m$

3) une matrice orthogonale V $n \times n$

telles que

$$A = U \Sigma V^T$$

"une"

DVS de A

Fin 7.5.8

Nomenclature: 7.5.9

Colonnes de U = vecteurs singuliers à gauche

= vecteurs propres de AA^T

Colonnes de V = vecteurs singuliers à droite

= vecteurs propres de $A^T A$.

et $\lambda_i = \sigma_i^2$ sont les val. propres de $A^T A$

(qui sont presque les mêmes que
les val. propres de AA^T)

$$\text{càd } \text{Sp}(AA^T) \setminus \{0\} = \text{Sp}(A^T A) \setminus \{0\}$$

démo / recette 7.5.10 : $\text{rang}(A) = r$

On prend les λ_i et v_i valeurs et
vecteurs propres unitaires de $A^T A$
(λ_i arrangés en ordre décroissant)

Donc $(v_1, \dots, v_r)$ b.o.n de $\mathbb{R}^n$

D'après Thm 7.5.6 $(Av_1, \dots, Av_r)$ b.o.gonale
de $\text{Im}(A)$

Pour $i=1, \dots, r$

Posons $u_i = \frac{Av_i}{\|Av_i\|} = \frac{Av_i}{\sigma_i} \in \mathbb{R}^m$

On complète la famille $(u_1, \dots, u_r)$

en une b.o.n

$r+1, \dots, m$

$(u_1, \dots, u_m)$ de $\mathbb{R}^m$

grâce à Gram-Schmidt.

On pose alors $U = (u_1 | \dots | u_m)_{m \times m}$ orthogonale

$V = (v_1 | \dots | v_r)_{n \times r}$ orthogonale

Calculons AV

$$(u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i} \text{ et } \sigma_i u_i = Av_i)$$

$$\begin{aligned} AV &= (Av_1 | Av_2 | \dots | Av_n) = (Av_1 | \dots | Av_r | 0 | \dots | 0) \\ &= (\sigma_1 u_1 | \sigma_2 u_2 | \dots | \sigma_r u_r | 0 | \dots | 0) \end{aligned}$$

Posons $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_r \end{pmatrix}_{r \times r}$

$$\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

calculons

$$U\Sigma = (u_1 | \dots | u_m) \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma_r \end{array} \right)_{m \times n}$$

$r \quad \underbrace{n-r}_{\dim \text{Ker}(A)}$

$$= (\sigma_1 u_1 | \sigma_2 u_2 | \dots | \sigma_r u_r | 0 | \dots | 0) = AV$$

Orthogonale

$\Rightarrow$

$$A = U \Sigma V^T \quad \text{cqd.}$$

(Fin 7.5.10)

ex
7.5.11: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $r = 2 = \text{rang}(A)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{vp.} = 3$$

vp 1 : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 3 est v.p de $A^T A$

1 est v.p de $A^T A$

0 est v.p de $A^T A$

car $\underbrace{E_0}_{\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)}$

$$E_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\uparrow$
de dim 1

$$E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow V = (v_3 | v_1 | v_0)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} r \times r \\ m-r \\ n-r \end{matrix}$$

$$A = U \Sigma V^T$$

Pin ex. 7.5.11

Dernières remarques sur une DVS (7.5.12)

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \exists A = U \Sigma V^T$$

$$U^{-1} = U^T$$

$$V^{-1} = V^T$$

$$\begin{pmatrix} U & \text{orthog.} & m \times m \\ V & \text{"} & n \times n \\ \Sigma & & m \times n \end{pmatrix}$$

Notons u_i les colonnes de U ①

v_i " de V ②

① sont vecteurs propres de AA^T (unitaires)

② sont vecteurs propres de $A^T A$

③ $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$ où $\lambda_i = \text{val. propre de } A^T A$
(non nulle)

NB: on peut aussi poser $u_i = \frac{Av_i}{\|Av_i\|}$
pour $i=1, \dots, r$
où $r = \text{rang}(A)$. (car $Av_i \neq 0$)

pour $i=r+1, \dots, n \Rightarrow Av_i = 0$

$v_i \in \text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T A) = E_0$

Proposition 7.5.13

La DVS d'une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
nous donne

1) $(u_1, \dots, u_r)$ b.o.n. de $\text{Im}(A)$ $r = \text{rang}(A) = \dim(\text{Im} A)$

(or $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$)

2) $(v_{r+1}, \dots, v_m)$ b.o.n. de $\text{Ker}(A^T)$

3) $(v_1, \dots, v_r)$ b.o.n. de $\text{Im}(A^T) = \text{Lgn}(A)$

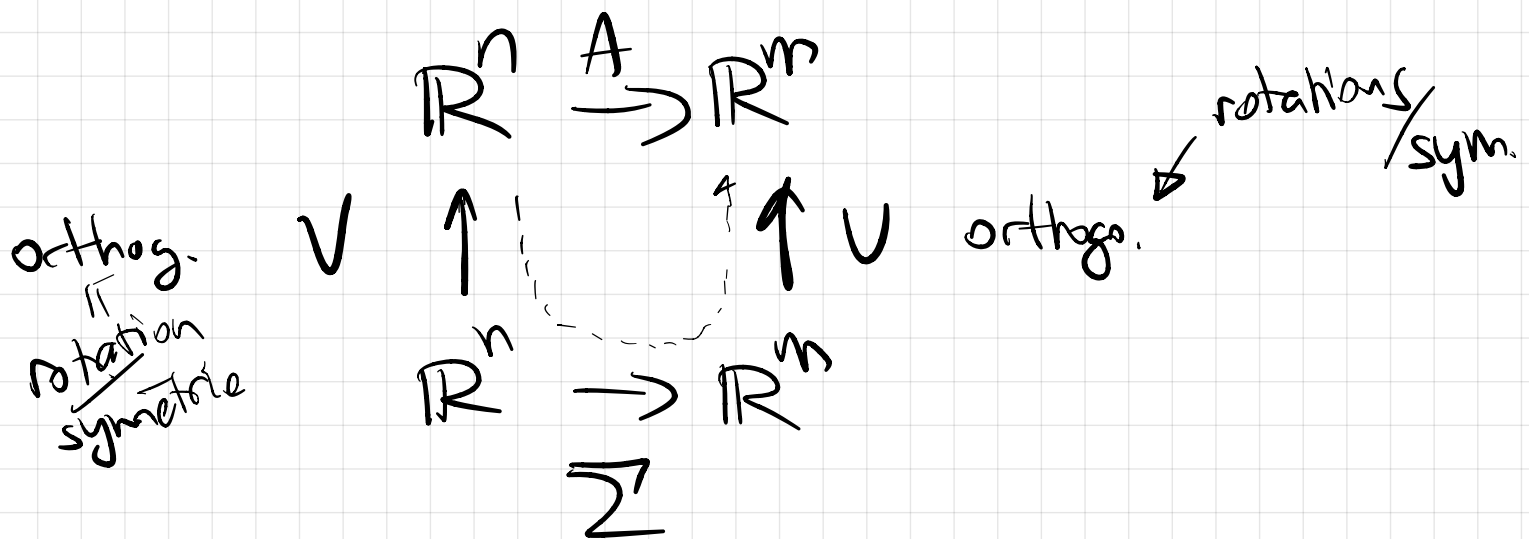
4) $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ b.o.n. $\text{Lgn}(A^T) = \text{Ker}(A)$

Proposition 7.5.14 : Une DVS donne

des b.o.n des 4 espaces fondamentaux de A
 $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A^T)$, $\text{Ker}(A^T)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m \\ \uparrow & & \nwarrow \\ & & \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A^T) \\ \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A^T) & & \end{array}$$

Point de vue géométrique



Cela nous donne un dernier
 rajout au Π éga-Théorème.

Rajout 7.5.15: Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (carré)

Alors A est inversible $\Leftrightarrow$

s) $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$

t) $\text{Ker}(A)^\perp = \mathbb{R}^n$

u) $\text{Lgn}(A) = \mathbb{R}^n$

v) A possède n val. singulières non nulles

w) la forme quadratique $x \mapsto x^T A^T A x$
est définie positive et non-dégénérée

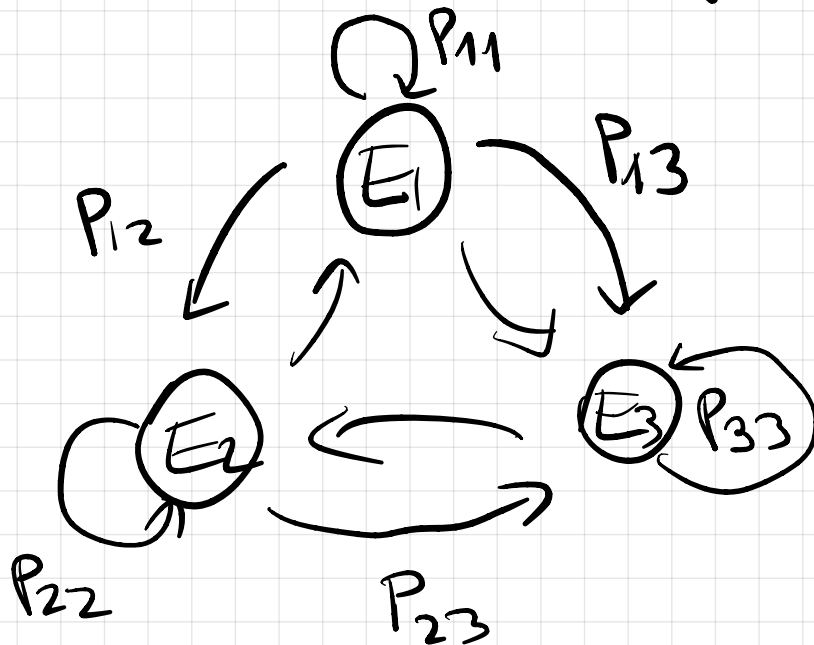
càd $x^T A^T A y$ définit
un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

$\uparrow$
 $> 4 \text{ é}$

Dernière application de l'AL

Chaînes de Markov discrètes

système à n états possibles



$n=3$

après temps t on a $0 \leq p_{ij} \leq 1$ probabilité
de passer de l'état E_j à E_i

Partant de $x(0) \in \mathbb{R}^n$
état initial

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$$

$x(0), x(1), \dots, x(k)$ après k unités de temps

on a la formule suivante

$$x(k) = P^k \cdot x(0)$$

$\uparrow$
 état initial

$k \in \mathbb{N}$ puissance k k entier

où $P =$ matrice de transition $\in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$= (P_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

ex: physique statistique

3 états pour une molécule (p.ex H_2O)

Solide, liquide, gazeux

ex à $0^\circ C$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & L & G \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.2 & 0.8 \\ 0.05 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

(donc 1 est v.p. de P)

Thm (Perron-Frobenius)

Soit $P = (p_{ij})$ t.q

$(\exists k \in \mathbb{N}$ tel que P^k a des coeff > 0)

Alors

1) $\exists$ un unique vecteur stationnaire $x \in \mathbb{R}^n$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \begin{pmatrix} x & | & - & | & x \end{pmatrix}$$

3) $\forall x(0)$ état initial on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x$$

Exemple : Google Page Rank[®] (S. Brin
L. Page)

Indice de popularité d'une page web: ~ 1998

Soit N = le nombre de pages web

crée une matrice $N \times N$

On dit
que $x \in \mathbb{R}^n$
est stationnaire
si $Px = x$

↑
vecteur
propre
associé
à $\lambda = 1$

supp. une page i possède k_i liens

alors pose
$$p_i^e = \frac{1-q}{k_i} + \frac{q}{N}$$

probab
vers
une
page liée
 q paramètre
($\approx 0,15$)

$$p_i^{ne} = \frac{q}{N}$$

$$\leadsto P = (p_{ij}) \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$$

le Page Rank d'une page i
est défini comme la $i^{\text{ème}}$ composante
du vecteur stationnaire de P .

Algorithme d'examen (R) G.Favi

0) Restez zen 😊

1) Résoudre questions (restantes) qui vous
paraissent les plus simples

2) Mangez/Buvez un petit truc (sucré/eau
de raisin)

3) Regardez 1/heure

4) Recommencez à 0) jusqu'à fin du temps
des gestions.